УДК 075.8

Н. О. ЯРЕЦЬКА
Хмельницький національний університет

ТРИВИМІРНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ З ЛОГІСТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ВПЛИВУ

Змодельована тривимірна модель динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу, встановлено умови існування та асимптотичної стійкості для положень рівноваги системи, виписані деякі результати якісного дослідження системи „в цілому" та побудовані фазові портрети системи.

In this article designed the three-dimension model of social systems dynamics with logistic dominant functions; determined conditions of existence and asymptoticly stable position of the system balance; extracted some results of qualitative research of the system " in wholly" and constructed system phase portraits.

В останні десятиліття зростає зацікавленість математичним моделюванням динаміки соціальних процесів, що обумовлено потребою в науковому обґрунтуванні закономірностей соціальної еволюції та перспектив розвитку людства у різних сферах діяльності. Тому, в даній роботі була сформована та досліджена трьохвимірна модель динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу, що є узагальненням аналогічної двомірної динамічної моделі [1 – 3].

Запропоновані моделі соціальних процесів з логістичними функціями впливу [1 – 5] були побудовані на основі зауваження [6, с. 83] московського професора Юрія Плотинського та пропозиції професора Штудгардського університету (ФРГ) Вольфгангха Вайдліха, які описувати поведінку суспільства за допомогою макрозмінних (наприклад, показники виробництва та споживання товарів, інвестицій, політичні та релігійні погляди та інше), а також впевненості, що кооперативна чи антагоністична поведінка досить типова для усіх соціальних систем суспільства.

Для формування і дослідження тривимірної нелінійної математичної моделі динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу використано якісну теорію диференціальних і логістичних рівнянь.

За допомогою цих методів проведено якісний аналіз сформованої тривимірної моделі з логістичними функціями впливу у скінченій та нескінченній частині області, а також побудовано фазові портрети „в цілому" можливої поведінки соціальних груп або спільнот між собою, що дозволить робити певні висновки та рекомендації, виходячи із їхньої взаємодії і взаємовпливу одна на одну.

Виписані також умови асимптотичної стійкості усіх положень рівноваги системи, умови співіснування точок в скінченній частині області (враховуючи їхній тип стійкості) та, на відміну від аналогічної двомірної моделі, було виявлено циклічне поводження моделі, тобто виписані умови існування не грубих положень рівноваги (центра) зі стійкою або нестійкою інваріантною площиною (поверхнею).

Отже, розглянемо модель [1 – 5]:

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (a \cdot th\frac{y - y_s}{q} - x), \quad \frac{dy}{dt} = y \cdot (b \cdot th\frac{x - x_s}{p} - y), \tag{1}$$

динаміки двох соціальних груп, де $x(t), y(t) \geq 0$, $a, b \geq 0$, p, q – довільні за знаком (як і в моделі Вайдліха [6, 7]), з „м'яким" перемиканням в точці (x_s, y_s), $x_s, y_s \geq 0$, що знаходиться в початку координат, внутрішньовидову конкуренцію ідеалізовано рівністю відповідних коефіцієнтів. Природніше, ці коефіцієнти вважати різними, тобто узагальнити модель (1) до вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (a \cdot th\frac{y - y_s}{q} - cx), \quad \frac{dy}{dt} = y \cdot (b \cdot th\frac{x - x_s}{p} - dy). \tag{2}$$

Другий напрямок узагальнення, що застосовується у даній роботі, – розглядати більше число учасників процесу (хоча б три).

Тому, виходячи з узагальненої моделі (2), сформуємо тривимірну модель динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу.

Випишемо моделі виду (2) для трьох учасників соціального процесу попарно:

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (\tilde{a}_1 \cdot th\frac{y - y_s}{\tilde{q}_1} - \tilde{c}_1 x), \quad \frac{dy}{dt} = y \cdot (\tilde{b}_1 \cdot th\frac{x - x_s}{\tilde{p}_1} - \tilde{d}_1 y), \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (\tilde{a}_2 \cdot th\frac{z - z_s}{\tilde{q}_2} - \tilde{c}_2 x), \quad \frac{dz}{dt} = z \cdot (\tilde{b}_2 \cdot th\frac{x - x_s}{\tilde{p}_2} - \tilde{d}_2 z), \tag{4}$$

$$\frac{dz}{dt} = z \cdot (\tilde{a}_3 \cdot th\frac{y - y_s}{\tilde{q}_3} - \tilde{c}_3 z), \quad \frac{dy}{dt} = y \cdot (\tilde{b}_3 \cdot th\frac{z - z_s}{\tilde{p}_3} - \tilde{d}_3 y). \tag{5}$$

Додамо відповідні похідні систем (3) – (5) і поділимо на два, отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \cdot (\dfrac{\tilde{a}_1}{2} \cdot th \dfrac{y - y_s}{\tilde{q}_1} + \dfrac{\tilde{a}_2}{2} \cdot th \dfrac{z - z_s}{\tilde{q}_2} - \dfrac{\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2}{2} x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y \cdot (\dfrac{\tilde{b}_1}{2} \cdot th \dfrac{x - x_s}{\tilde{p}_1} + \dfrac{\tilde{b}_3}{2} \cdot th \dfrac{z - z_s}{\tilde{p}_3} - \dfrac{\tilde{d}_1 + \tilde{d}_3}{2} y), \\ \dfrac{dz}{dt} = z \cdot (\dfrac{\tilde{b}_2}{2} \cdot th \dfrac{x - x_s}{\tilde{p}_2} + \dfrac{\tilde{a}_3}{2} \cdot th \dfrac{y - y_s}{\tilde{q}_3} - \dfrac{\tilde{c}_3 + \tilde{d}_2}{2} z). \end{cases} \qquad (6)$$

Зробимо заміну змінних

$$\frac{\tilde{a}_2}{2} = b_1, \quad \frac{\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2}{2} = c_1, \quad \tilde{q}_2 = p_1, \quad \tilde{p}_2 = q_3, \quad \frac{\tilde{a}_1}{2} = a_1, \quad \frac{\tilde{b}_1}{2} = a_2, \quad \frac{\tilde{b}_3}{2} = b_2, \quad \frac{\tilde{d}_3 + \tilde{d}_1}{2} = c_2,$$
$$\tilde{q}_1 = q_1, \quad \tilde{q}_3 = p_3, \quad \tilde{p}_1 = q_2, \quad \tilde{p}_3 = p_2, \quad \frac{\tilde{d}_2 + \tilde{c}_3}{2} = c_3, \quad \frac{\tilde{b}_2}{2} = a_3, \quad \frac{\tilde{a}_3}{2} = b_3.$$

Отже, випишемо узагальнену модель динаміки трьох соціальних груп:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \cdot (a_1 \cdot th \dfrac{y - y_s}{q_1} + b_1 \cdot th \dfrac{z - z_s}{p_1} - c_1 x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y \cdot (a_2 \cdot th \dfrac{x - x_s}{q_2} + b_2 \cdot th \dfrac{z - z_s}{p_2} - c_2 y), \\ \dfrac{dz}{dt} = z \cdot (a_3 \cdot th \dfrac{x - x_s}{q_3} + b_3 \cdot th \dfrac{y - y_s}{p_3} - c_3 z), \end{cases} \qquad (7)$$

де $c_i > 0 \quad (i = \overline{1,3})$ – коефіцієнти внутрішньовидової конкуренції, $x, y, z \geq 0$, $a_i, b_i > 0, \quad (i = \overline{1,3})$, з „м'яким" перемиканням в точці (x_s, y_s, z_s), що знаходиться в початку координат і, причому, $a_i, b_i, \quad (i = \overline{1,3})$ є відповідними модулями (амплітудами) максимального впливу, а характер впливу (кооперативність чи антагоністичність) та крутизну в околі точок перемикання визначатимуть, відповідно, знаки і модулі параметрів $p_i, q_i \quad (i = \overline{1,3})$. Тобто знаки параметрів p_i і q_i вказуватимуть на кооперативність при $p_i, q_i > 0 \quad (i = \overline{1,3})$ чи на антагоністичність при $p_i, q_i < 0 \quad (i = \overline{1,3})$ або на певні взаємовпливи: при різних за знаками p_i і q_i $(i = \overline{1,3})$. Комбінуючи, таким чином, різні варіанти функцій впливу, можна дослідити всі ці можливі випадки.

Оскільки в моделі (7) присутня велика кількість параметрів, спробуємо їх скоротити.

Розглянемо спочатку вихідну систему (2). Заміною змінних:

$$c_1 x = x_1, \quad cx' = x_1', \quad d \cdot y = y_1, \quad d \cdot y' = y_1', \quad y_s d = \hat{y}_s \quad x_s c = \hat{x}_s, \quad cp = \hat{p}, \quad qd = \hat{q}$$

зменшимо кількість її параметрів наступним чином:

$$\frac{dx_1}{dt} = c \cdot x \cdot (a \cdot th \frac{d \cdot y - y_s \cdot d}{q \cdot d} - c \cdot x),$$
$$\frac{dy_1}{dt} = d \cdot y \cdot (b \cdot th \frac{c \cdot x - x_s \cdot c}{p \cdot c} - d \cdot y),$$
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot (a \cdot th \frac{y_1 - \hat{y}_s}{\hat{q}} - x_1), \quad \frac{dy_1}{dt} = y_1 \cdot (b \cdot th \frac{x_1 - \hat{x}_s}{\hat{p}} - y_1). \qquad (8)$$

В системі (8) прискоримо час заміною:

$$a \cdot dt = d\tau_1, \quad b \cdot dt = d\tau_2$$

та

$$\frac{1}{a} x_1 = x_2, \quad \frac{1}{b} y_1 = y_2, \quad \hat{q} b = \overline{q}, \quad \hat{y}_s b = \overline{y}_s, \quad \hat{p} a = \overline{p}, \quad \hat{x}_s a = \overline{x}_s.$$

Отримаємо:

$$\frac{dx_2}{d\tau_1} = x_2 \cdot (th\frac{y_2 - \overline{y}_s}{\overline{q}} - x_2), \quad \frac{dy_2}{d\tau_2} = y_2 \cdot (th\frac{x_2 - \overline{x}_s}{\overline{p}} - y_2) \ . \tag{9}$$

Тепер, перейшовши до тривимірної моделі, маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt_1} = x(\dfrac{1}{2}th\dfrac{y - y_s}{q_1} + \dfrac{1}{2}th\dfrac{z - z_s}{p_1} - x); \\ \dfrac{dy}{dt_2} = y(\dfrac{1}{2}th\dfrac{x - x_s}{q_2} + \dfrac{1}{2}th\dfrac{z - z_s}{p_2} - y); \\ \dfrac{dz}{dt_3} = z(\dfrac{1}{2}th\dfrac{x - x_s}{q_3} + \dfrac{1}{2}th\dfrac{y - y_s}{p_3} - z); \end{cases} \tag{10}$$

де

$$dt_1 = \frac{2b_1a_1}{b_1 + a_1}dt, \quad dt_2 = \frac{2b_2a_2}{b_2 + a_2}dt, \quad dt_3 = \frac{2b_3a_3}{b_3 + a_3}dt \ .$$

Вже дев'ять параметрів замість вісімнадцяти.

Потрібно зробити зауваження про те, що модель (10) можна використовувати лише при знаходженні координат положень рівноваги системи (7), оскільки в системі (10) при скороченні параметрів було введено диференціювання за різними змінними часу, оскільки це не впливає на значення координат положень рівноваги системи (7), але при якісному аналізі спрощена модель може дати невірні результати, тому зведемо її до однакового часового виміру.

Розглянемо систему (10). Вкажемо, що

$$dt_1 = \frac{2b_1a_1}{b_1 + a_1}dt, \quad dt_2 = \frac{b_2a_2(b_1 + a_1)}{b_1a_1(b_2 + a_2)}dt, \quad dt_3 = \frac{b_3a_3(b_1 + a_1)}{b_1a_1(b_3 + a_3)}dt$$

і випишемо (10) у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt_1} = x(\dfrac{1}{2}th\dfrac{y - y_s}{q_1} + \dfrac{1}{2}th\dfrac{z - z_s}{p_1} - x); \\ \dfrac{dy}{dt_1} = m \cdot y(\dfrac{1}{2}th\dfrac{x - x_s}{q_2} + \dfrac{1}{2}th\dfrac{z - z_s}{p_2} - y); \\ \dfrac{dz}{dt_1} = n \cdot z(\dfrac{1}{2}th\dfrac{x - x_s}{q_3} + \dfrac{1}{2}th\dfrac{y - y_s}{p_3} - z); \end{cases} \tag{11}$$

де

$$m = \frac{b_2a_2(b_1 + a_1)}{b_1a_1(b_2 + a_2)}, \quad n = \frac{b_3a_3(b_1 + a_1)}{b_1a_1(b_3 + a_3)} \ .$$

Для системи (11) встановлено умови існування та асимптотичної стійкості положень рівноваги в квадранті $R_+^3 = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$:

Положення рівноваги $O(0,0,0)$ асимптотично стійке при

$$\begin{cases} p_i > 0, \\ q_i > 0, \end{cases} \quad або \quad \begin{cases} 0 < p_i < e_i, \\ q_i < 0, \end{cases} \quad або \quad \begin{cases} p_i < e_i, \\ q_i > 0, \end{cases} \quad (i = \overline{1,3})$$

де

$$e_1 = -\frac{z_sq_1}{y_s}, \quad e_2 = -\frac{z_sq_2}{x_s}, \quad e_3 = -\frac{y_sq_3}{x_s} \ .$$

Положення рівноваги $A_1(0,0,-\frac{1}{2}(th\frac{x_s}{q_3} + th\frac{y_s}{p_3})) \in R_+^3$ існує при:

$$\begin{cases} e_3 < p_3 < 0, \\ q_3 > 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} p_3 > e_3, \\ q_3 < 0, \end{cases} \text{, або } \begin{cases} p_3 < 0, \\ q_3 < 0, \end{cases}$$

й асимптотично стійке за умови

$$p_i, q_i > 0 \quad або \quad p_i, q_i < 0, \quad або \quad \begin{cases} 0 < p_i < e_i \\ q_i < 0 \end{cases}, \quad або \quad \begin{cases} q_i > 0 \\ p_i < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

Аналогічно знайдені відповідні умови і для положень рівноваги $A_2(0, -\frac{1}{2}(th\frac{x_s}{q_2} + th\frac{z_s}{p_2}), 0) \in R_+^3$ та $A_3(-\frac{1}{2}(th\frac{y_s}{q_1} + th\frac{z_s}{p_1}), 0, 0) \in R_+^3$.

Положення рівноваги $B_1(0, y_0, z_0) \in R_+^3$ існує при

$$\begin{cases} e_i < p_i < 0, \\ q_i > 0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} p_i > e_i, \\ q_i < 0, \end{cases}, \text{або} \begin{cases} p_i < 0, \\ q_i < 0, \end{cases}$$

і асимптотично стійке при

$$\begin{cases} y_0 + z_0 - A_1 > 0, \\ y_0 z_0 - A_1(y_0 + z_0) > 0, \\ (y_0 z_0 - A_1(y_0 + z_0))(y_0 + z_0 - A_1) > y_0 z_0 A_1 (A_2 - 1), \end{cases} \tag{12}$$

де

$$A_1 = \frac{1}{2}(th\frac{y_0 - y_s}{q_1} + th\frac{z_0 - z_s}{p_1}), \; A_2 = \frac{mn}{4 p_2 p_3 ch^2 \frac{z_0 - z_s}{p_2} ch^2 \frac{y_0 - y_s}{p_3}}.$$

Аналогічно знайдені умови існування і асимптотичної стійкості для $B_2(x_0, 0, z_0) \in R_+^3$, $B_3(x_0, y_0, 0) \in R_+^3$.

Для точки $C(x_0, y_0, z_0) \in R_+^3$ умови існування мають вигляд:

$$\begin{cases} e_i < p_i < 0, \\ q_i > 0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} p_i > e_i, \\ q_i < 0, \end{cases}, \text{або} \begin{cases} p_i < 0, \\ q_i < 0. \end{cases}$$

А умови асимптотичної стійкості:

$$1 < A_1 < 4 + \frac{1}{x_0}(z_0 + y_0) + \frac{1}{y_0}(z_0 + x_0) + \frac{1}{z_0}(x_0 + y_0), \tag{13}$$

де

$$A_1 = \frac{nm}{8 p_1 q_2 p_3 ch^2 \frac{z - z_s}{p_1} ch^2 \frac{x - x_s}{q_2} ch^2 \frac{y - y_s}{p_3}} + \frac{nm}{8 q_1 p_2 q_3 ch^2 \frac{z - z_s}{p_2} ch^2 \frac{x - x_s}{q_3} ch^2 \frac{y - y_s}{q_1}} -$$
$$- \frac{n}{4 p_1 q_3 ch^2 \frac{z - z_s}{p_1} ch^2 \frac{x - x_s}{q_3}} - \frac{mn}{4 p_2 p_3 ch^2 \frac{z - z_s}{p_2} ch^2 \frac{y - y_s}{p_3}} - \frac{m}{4 q_1 q_2 ch^2 \frac{x - x_s}{q_2} ch^2 \frac{y - y_s}{q_1}}.$$

Також аналітично виписано умови співіснування усіх положень рівноваги системи у скінченній частині області. За допомогою чисельних методів і засобів ЕОМ було знайдено координати положень рівноваги $B_1(0, y_0, z_0)$, $B_2(x_0, 0, z_0)$, $B_3(x_0, y_0, 0)$ та $C(x_0, y_0, z_0)$ моделі (7). Запропоновано новий метод оцінки параметрів (коефіцієнтів) дво- [3] і тривимірної [4] моделі динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу за статистичними даними, придатний для роботи із сформованими системами диференціальних рівнянь. Метод виписано в алгоритмічній формі та складено відповідну програму на мові програмування Turbo Pascal 7, що дає можливість практично застосувати та використовувати сформовану модель динаміки соціальних процесів (7) [3, 4] для досліджень.

Крім того, для (7) було проілюстровано усі топологічно різні фазові портрети „в цілому”, які ілюструють можливу поведінку соціальних груп або спільнот між собою, що дозволить робити певні висновки та рекомендації, виходячи із їхньої взаємодії і взаємовпливу одна на одну, деякі з них зображені на рис. 1, 2. Виявлено також існування циклічного поводження системи та виписані відповідні умови існування не грубих положень рівноваги (типу „центр”) із стійкою або нестійкою інваріантною площиною (поверхнею), до якої усі траєкторії або наближаються і закручуються у цикли, або, знаходячись деякий час у циклі, віддаляються і прямують до інших положень рівноваги. Ці випадки включені у варіанти поведінки фазових траєкторій сформованої моделі, що також проілюстровані на рис. 1, 2.

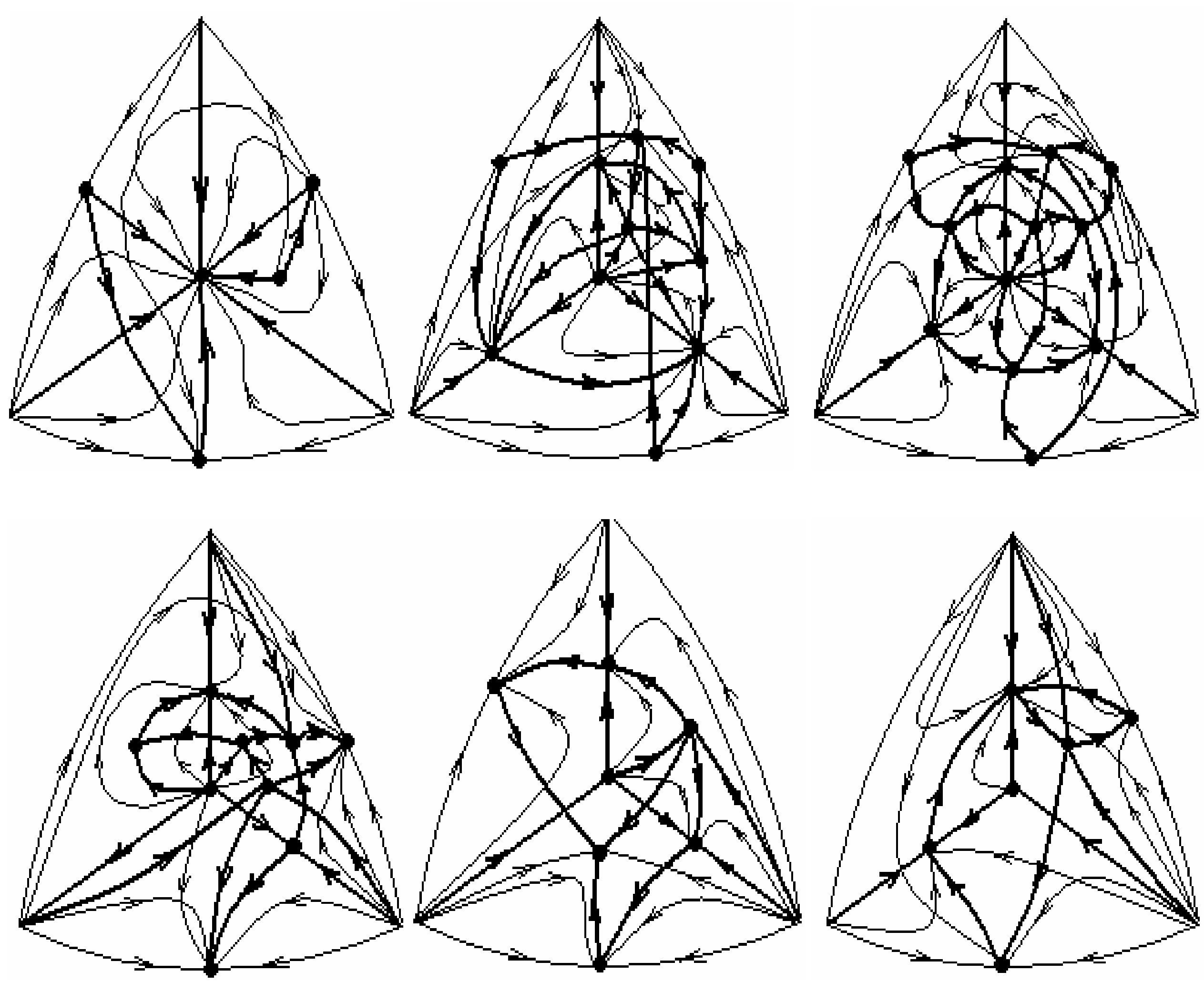
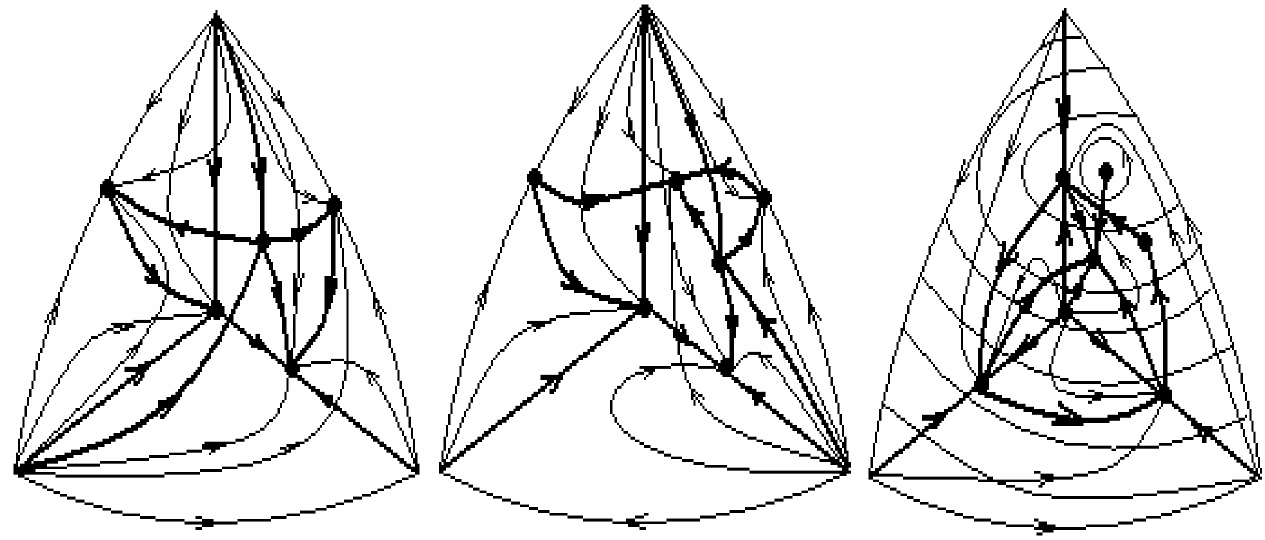


Рис. 1. Деякі фазові портрети тривимірної моделі динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу



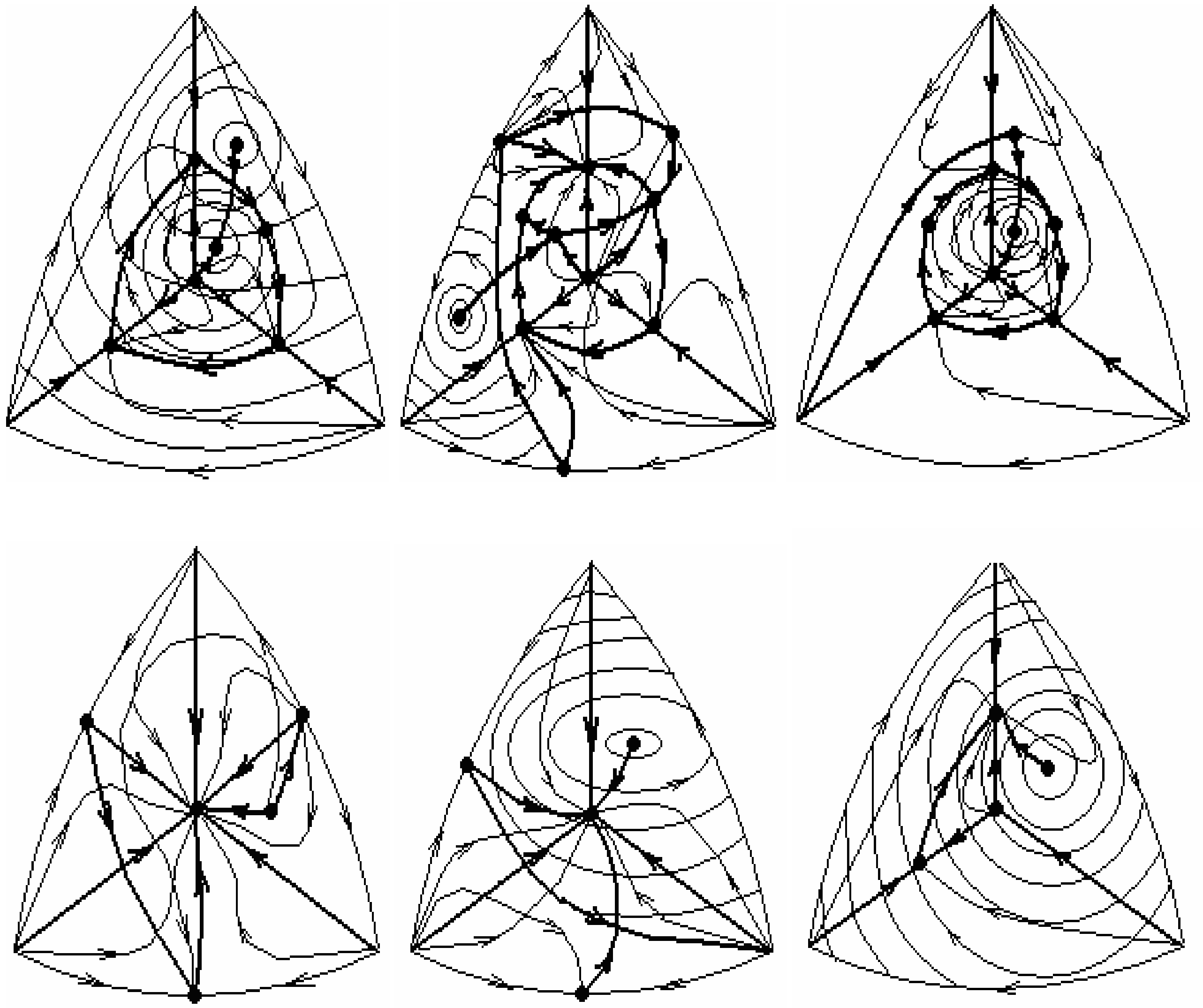


Рис. 2. Деякі фазові портрети тривимірної моделі динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу

Можливість існування стійкої інваріантної площини, що проходить через не грубу точку рівноваги системи, можна вважати, за деяких припущенню, «подібною» до граничного циклу, оскільки усі траєкторії до неї прямують асимптотично, закручуючись в деяку замкнену траєкторію, але з часом все-таки можуть перескакувати на іншу (сусідню).

Отже, результати одержані на даний час дозволяють досить згладжено описувати і аналізувати достатньо широкий спектр задач та практично важливих ситуацій, у яких присутні відносини кооперативності та антагоністичності [1 – 6], причому, вірна інтерпретація проведеного дослідження для конкретної задачі дасть змогу формувати практичні рекомендації щодо планування бажаних цілей та їх досягнення у взаємовідносинах між двома, трьома соціальними групами.

Список використаних джерел

1. Прошина Н. О. Модель динаміки соціальних систем з логістичними функціями впливу / Н. О. Прошина, І. П. Момот // Механіка та інформатика : матер. міжнар. українсько-польської конф. – Хмельницький, 2004. – С. 18.

2. Proshina N. O. Stability of Weidlich type dynamic model with logistic dominant function / N. O. Proshina, I. P. Momot // Akademia GÓRNICZO-HUTNICZA im. Stanisława Staszica w Krakowie. Sesje Studenckich kól naukowych. Materiały XLI sesji Pionu Hutniczego. Streszczenia referatów. Program Sesji Informacje o kołach naukowych. – Kraków , 13 maja 2004. – Tom 1. – P. 174.

3. Прошина Н. О. Формування та якісний аналіз нелінійної моделі динаміки відносин між релігійними конфесіями / Н. О. Прошина // Церква і держава у служінні народові : матеріали науково-практ. конф., 2 – 4 листопада 2005 р. – Хмельницький : Хмельницька єпархія української православної церкви, МАУП, 2006. – С. 438 – 442.

4. Прошина Н. О., Момот І. П., Прошин О. О. Формування та практичне застосування тривимірної моделі динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу // Вісник Хмельницького

національного університету. Економічні науки. — 2006. — № 5. — Т. 1. — С. 117 — 122.

5. Ярецька Н. О. Положення рівноваги та умови існування тривимірної моделі динаміки соціальних процесів з логістичними функціями впливу / Н. О. Ярецька // Актуальні проблеми сучасної науки : матеріали другої всеукр. науково-практ. інтернет-конф. – К. , 2006. – Ч. 1. – С. 14.

6. Плотинський Ю. М. Математическое моделирование динамики социальных процессов / Плотинський Ю. М. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – С. 85.

7. Weidlich W. Stability and Cyclicity in Social Systems / W. Weidlich // Behavioral Sci. – 1988. – V. 33. – P. 241 – C. 256.